Internationales Studienkolleg der Hochschule Kaiserslautern

Semester: Sommersemester 2022

FSP-Teilprüfung: Mathematik

Datum: 08.06.2022

Dauer: 90 Minuten

Prüfer: Dr. Jens Siebel, Bertram Heimes, StD. Werner Müller, Jörg Wilhelm

Aufgabe 1 (Heimes)

Hinweis: Rechnen Sie, falls erforderlich, auf jeweils drei Nachkommastellen genau!

Gegeben sind die komplexen Zahlen $z_1 = 4 - i$ und $z_2 = -3 + 5 \cdot i$.

a) Geben Sie z_1 und z_2 jeweils in trigonometrischer Form und in Exponentialform an *(3 Punkte)*.

b) Berechnen Sie jeweils in kartesischer Form:

b1) $z_1 \cdot z_2$ *(1 Punkt)*,

b2) $\frac{z_2}{z_1} + z_2$ *(2 Punkte)*.

c) Bestimmen Sie alle Lösungen w der Gleichung $w^3 = z_1$, und zeichnen Sie diese in ein Diagramm *(4 Punkte)*.

Aufgabe 2 (Dr. Siebel)

a) Schreiben Sie die explizite Darstellung einer beliebigen nichtlinearen, inhomogenen Differenzialgleichung 3. Ordnung auf *(1 Punkt)*.

b) Bestimmen Sie die linear-homogene Differenzialgleichung mit konstanten Koeffizienten und der Lösung $f(x) = c_1 + c_2 \cdot x + c_3 \cdot e^{i \cdot x} + c_4 \cdot e^{-i \cdot x}$ *(2 Punkte)*.

c) Bestimmen Sie den Ansatz $f_p(x)$ zur partikulären Lösung von $f''(x) + f(x) = \cos(x)$ *(2 Punkte)*.

d) Lösen Sie das Anfangswertproblem $f'(x) - f(x) = 5 \cdot e^x$, $f(0) = 1$ *(5 Punkte)*.

FSP-Teilprüfung: Mathematik, Sommersemester 2022, 08.06.2022

Aufgabe 3 (Dr. Siebel)

Kreuzen Sie jeweils das Feld ☐ mit der einzigen richtigen Alternative an *(10 Punkte)*.

richtige Antwort: 1 Punkt falsche bzw. fehlende Antwort: 0 Punkte

a)	$z=\sqrt{8}\left[\cos(45°)+i\cdot\sin(45°)\right] \Leftrightarrow$			
	$\bar{z}=2+2\cdot i$ ☐	$\bar{z}=-2+2\cdot i$ ☐	$\bar{z}^2=-8\cdot i$ ☐	$z^3=\sqrt{512}\cdot e^{i\cdot 215°}$ ☐
b)	Welche Funktion hat eine Polstelle?			
	$f(x)=\dfrac{x^2-1}{1-x}$ ☐	$f(x)=\dfrac{1-x}{x-1}$ ☐	$f(x)=\dfrac{\ln(x)}{1-x}$ ☐	$f(x)=\dfrac{1+x}{x-1}$ ☐
c)	Das Skalarprodukt von $\vec{a}=\begin{pmatrix}a_x\\a_y\end{pmatrix}$ und einem parallelen Vektor $\vec{b}$ ist:			
	$c\cdot\left(a_x^2+a_y^2\right) \quad c\in\mathbb{R}^{\neq 0}$ ☐	0 ☐	$c\cdot\left(a_x+a_y\right) \quad c\in\mathbb{R}$ ☐	$c\cdot\lvert\vec{a}\rvert \quad c\in\mathbb{R}$ ☐
d)	Die Lösung von $f'(x)=x,\ f(1)=0$ ist:			
	$f(x)=e^x+\frac{1}{2}\cdot x^2$ ☐	$f(x)=\frac{1}{2}\cdot x^2-\frac{1}{2}$ ☐	$f(x)=\frac{1}{2}\cdot x^2+\frac{1}{2}$ ☐	$f(x)=e^{-x}+\frac{1}{2}\cdot x^2$ ☐
e)	Wir haben $A=\begin{pmatrix}2 & 5\end{pmatrix}$ und $B=\begin{pmatrix}1 & 4\end{pmatrix}$. Was kann man hier nicht berechnen?			
	$A\cdot B$ ☐	$A^T\cdot B$ ☐	$A\cdot B^T$ ☐	$B^T\cdot A$ ☐
f)	Beim Newton-Verfahren gilt für $f(x)=e^x+x \quad \mathbb{D}_f=\mathbb{R}$ mit $x_0=0$:			
	$x_1=-1$ ☐	$x_1=-0{,}5$ ☐	$x_1=0{,}5$ ☐	$x_1=1$ ☐
g)	Die Stammfunktion von $f(x)=\ln(x) \quad \mathbb{D}_f=\left]0,\infty\right[$ ist:			
	$x\cdot\ln(x)-x$ ☐	$x\cdot\ln(x)+x$ ☐	$x\cdot\ln(x)-x+c \quad c\in\mathbb{R}$ ☐	$x-x\cdot\ln(x)$ ☐
h)	Ein Normalenvektor der Ebene $\varepsilon:\ 2\cdot x-y+5\cdot z=8$ ist:			
	$\vec{n}=\begin{pmatrix}4\\2\\-10\end{pmatrix}$ ☐	$\vec{n}=\begin{pmatrix}-4\\-2\\-10\end{pmatrix}$ ☐	$\vec{n}=\begin{pmatrix}-4\\2\\10\end{pmatrix}$ ☐	$\vec{n}=\begin{pmatrix}-4\\2\\-10\end{pmatrix}$ ☐
i)	$f(x)=\dfrac{x-x^3+2\cdot x^2}{4\cdot x^3-x+3} \quad \mathbb{D}_f=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle\vert\, x\neq -1\right\}$ hat die horizontale Asymptote:			
	$y_h=-0{,}25$ ☐	$y_h=0$ ☐	$y_h=1$ ☐	keine ☐
j)	Das LGS $\left(\begin{array}{cc\|c} e & e^2 & 1 \\ 1 & a & 1/e \end{array}\right)$ hat unendlich viele Lösungen für:			
	$a=-e$ ☐	$a=0$ ☐	$a=1$ ☐	$a=e$ ☐

Aufgabe 4 (StD. Müller)

Wir haben die Funktion $f(x)=\frac{1}{4}\cdot x^3+\frac{1}{2}\cdot x^2-\frac{15}{4}\cdot x \quad \mathbb{D}_f=\mathbb{R}$.

a) Bestimmen Sie alle Nullstellen *(2 Punkte)*.

b) Bestimmen Sie alle Hoch- und Tiefpunkte *(3 Punkte)*.

c) Bestimmen Sie alle Wendepunkte *(2 Punkte)*.

d) Bestimmen Sie die Fläche, die vom Graphen der Funktion und der x-Achse <u>vollständig</u> eingeschlossen wird, auf drei Nachkommastellen genau *(3 Punkte)*.

Aufgabe 5 (Wilhelm)

a) Bestimmen Sie die Determinante der Matrix $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ -3 & -1 & 3\\ 2 & -1 & -7\end{pmatrix}$ *(2 Punkte)*.

b) Prüfen Sie die Vektoren $\vec{a}=\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix}$ und $\vec{c}=\begin{pmatrix}-4\\-3\\7\end{pmatrix}$ auf lineare Unabhängigkeit *(1 Punkte)*.

c) Stellen Sie eine Koordinatenform der Ebene ε_1 auf, die durch die Punkte $A(2|2|1)$, $B(10|6|-2)$ und $C(-2|-3|4)$ geht *(2 Punkte)*.

d) Geben Sie eine Parameterdarstellung der Ebene ε_2 an, die die Gerade $\mathcal{G}:\ r_{\mathcal{G}}=\begin{pmatrix}-1\\2\\-2\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix} \quad t\in\mathbb{R}$ und den Punkt $D(0|4|-2)$ enthält *(2 Punkte)*.

e) Bestimmen Sie einen Wert m_z, so dass der Punkt $M(13{,}2|7{,}4|m_z)$ von der Ebene $\varepsilon_3:\ 2\cdot x-2\cdot y+z=6$ den Abstand $d=4\,LE$ hat *(3 Punkte)*.

Aufgabe 6 (Heimes, StD. Müller)

a) Gegeben ist die Funktion $f(x)=\frac{1}{8}\cdot x^3+\frac{9}{8}\cdot x^2+\frac{15}{8}\cdot x-\frac{25}{8} \quad \mathbb{D}_f=\mathbb{R}$

a1) Geben Sie die Tangentengleichung im Punkt $P\left(2\middle|\frac{49}{8}\right)$ an *(3 Punkte)*.

a2) Prüfen Sie die Funktion <u>mathematisch</u> auf Symmetrie zur y-Achse sowie zum Nullpunkt *(2 Punkte)*.

b) Bestimmen Sie den Inhalt der Fläche, die <u>vollständig</u> von den Funktionen $f(x)=\frac{1}{4}\cdot x^2 \quad \mathbb{D}_f=\mathbb{R}$ und $g(x)=(x-1)^2 \quad \mathbb{D}_f=\mathbb{R}$ eingeschlossen wird, auf drei Nachkommastellen genau *(3 Punkte)*.

c) Für welche Werte $z\in\mathbb{R}$ gilt $\int_{z}^{2\cdot z} x\,dx=6$? *(2 Punkte)*